$(1 \le r \le n-1)$ with values in the space of homogeneous tensors on (*M, g*) (see Zbl 0484.53039). If we denote by D^* the operator formally adjoint to the third basis operator D then the second order operator D^*D: $\Omega^r(M) \to$ $\to \Omega^r(M)$ is elliptic (see also Zbl 1239.53058).

УДК 512.64

А. Я. Султанов[1], И. А. Гарькина[2]
[1]Пензенский государственный университет
[2]Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
sultanovaya@rambler.ru[1]; i.a.naum@mail.ru[2]

Неприводимые четырехмерные алгебры с единицей, получаемые методом Кэли — Диксона

Найдены все четырехмерные неприводимые ассоциативные алгебры с единицей над полем действительных чисел, которые можно получить методом Кэли — Диксона удвоения действительных двумерных алгебр с единицей.

Ключевые слова: линейные алгебры, неприводимые алгебры, ассоциативные алгебры, алгебры с единицей, процесс Кэли — Диксона удвоения алгебр.

В 1908 году Э. Штуди и Э. Картан опубликовали обзорную статью [1], в которой они в частности привели классификацию всех четырехмерных неприводимых ассоциативных алгебр с единицей над полем R действительных чисел. Приведем эту классификацию по книге [2]. Алгебры эти обозначим символами $A_{4,m}\,(m = 1, 2, \ldots)$, а базисные элементы этих алгебр символами e_0, e_1, e_2, e_3, причем e_0 во всех случаях является символом единицы алгебры. Поскольку $e_0e_k = e_ke_0 = e_k$ $\left(k = 0, 1, 2, 3\right)$, то эти соотношения в таблице указывать не будем. Представим лишь произведения e_ie_j ($i, j \neq 0$).

	e_1^2	e_2^2	e_3^2	e_1e_2	e_2e_1	e_1e_3	e_3e_1	e_2e_3	e_3e_2	Примечание
$A_{4,1}$	e_2	0	0	e_3	e_3	0	0	0	0	
$A_{4,2}$	e_0	0	0	e_2	$-e_2$	e_3	e_3	0	0	
$A_{4,3}$	e_3	λe_3	0	e_3	$-e_3$	e_3	e_3	e_3	e_3	λ — постоянная
$A_{4,4}$	e_3	e_3	0	0	0	0	0	0	0	
$A_{4,5}$	e_3	$-e_3$	0	0	0	0	0	0	0	
$A_{4,6}$	e_2	0	0	0	0	0	0	0	0	
$A_{4,7}$	$-e_0$	$-e_0$	$-e_0$	e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_2	e_1	$-e_1$	
$A_{4,8}$	e_0	e_0	$-e_0$	e_3	$-e_3$	e_2	$-e_2$	$-e_1$	e_1	
$A_{4,9}$	e_0	0	0	e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_2	0	0	
$A_{4,10}$	e_0	0	0	e_3	$-e_3$	e_2	$-e_2$	0	0	
$A_{4,11}$	0	0	0	e_3	$-e_3$	0	0	0	0	
$A_{4,12}$	e_0	0	0	e_2	$-e_3$	e_3	$-e_3$	0	0	
$A_{4,13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

В настоящей работе перечислим все четырехмерные неприводимые ассоциативные алгебры с единицей, которые получим методом удвоения Кэли — Диксона.

1. Метод удвоения Кэли — Диксона

Пусть P — некоторое поле, и A — конечномерная линейная алгебра над этим полем. Линейность алгебры означает, что операция умножения в ней линейна по каждому аргументу, то есть выполняются тождества

$$(\alpha a+\beta b)c=\alpha(ac)+\beta(bc),\; c(\alpha a+\beta b)=\alpha(ca)+\beta(cb)$$

для $\alpha,\beta \in \mathrm{P}; a,b\in \mathrm{A}$.

Предположим, что выбрана инволюция алгебры A, то есть линейное отображение $\varphi:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a) \text{ и } \varphi^2(a)=a$$

для любых элементов $a,b\in\mathrm{A}$. Кроме того, зафиксируем произвольный скаляр $\alpha\in\mathrm{P}$. На прямом произведении $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$, которое стандартным образом снабдим структурой векторного пространства над полем P, зададим операцию умножения формулой

$$(a_1,a_2)(a_3,a_4)=\left(a_1a_3+\alpha a_4\overline{a}_2,\overline{a}_1a_4+a_3a_2\right), \tag{1}$$

где $\overline{a}_2=\varphi(a_2),\overline{a}_1=\varphi(a_1)$. Элемент $\overline{a}=\varphi(a)$ называется сопряженным элементом для элемента a относительно инволюции φ. Операция умножения на $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$, определенная по формуле (1), служит линейной по каждому аргументу, следовательно, векторное пространство $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$, снабженное этой операцией умножения, является линейной алгеброй над полем P. Обозначим эту алгебру как набор $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$. Элемент $(1,0)$ этой алгебры — ее единица. Множество $A'=\{(a,0)|\ a\in A\}$ выступает подалгеброй алгебры $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$, изоморфной алгебре A. Алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ называется удвоением алгебры A, полученным процессом Кэли — Диксона [3]. Элемент $(0,1)=\nu$ обладает следующим свойством: $\nu^2=\nu\nu=\alpha(1,0)$. По формуле (1) находим, что $\nu(a,0)=(0,a)$ для любого элемента $a\in\mathrm{A}$. В силу этого каждый элемент (a,b) алгебры $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ можно представить как

$$(a,b)=(a,0)+\nu(0,b).$$

Отождествим $(a,0)$ алгебры $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ с элементом a алгебры A. Тогда предыдущее равенство можно представить следующим образом:

$$(a,b)=a+\nu b .$$

По формуле (1) получим тождество $a\nu=\nu\overline{a}$ (здесь a отождествили с парой $(a,0)$, а $\overline{a}=\varphi(a)$).

Отметим некоторые свойства алгебры $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$.

1°. Если размерность алгебры A равна n, то размерность алгебры $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ равна $2n$.

2°. Если инволюция φ является тождественной и алгебра A — коммутативна, то алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ является коммутативной.

3°. Если алгебра A — коммутативна и ассоциативна, то алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ ассоциативна.

4°. Если инволюция φ не является тождественной, то алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ некоммутативна.

5°. Если алгебра A некоммутативна, то алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)$ неассоциативна.

6°. Алгебра $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)=\mathrm{B}$ обладает двумя инволюциями: тождественной инволюцией $\theta=id_{\mathrm{A}}$ и инволюцией $\overline{\theta}$, определенной условием $\overline{\theta}(a+\nu b)=\overline{a}-\nu b$.

7°. Пусть алгебра A задана над полем R действительных чисел. Тогда имеют место изоморфизмы:

(а) $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)\cong(\mathrm{A},\varphi,1)$, если $\alpha>0$;

(б) $(\mathrm{A},\varphi,\alpha)\cong(\mathrm{A},\varphi,-1)$, если $\alpha<0$.

В заключении этого раздела заметим, что если алгебра конечной размерности коммутативна, обладает единицей и содержит нетривиальный идемпотент, то эта алгебра является приводимой.

2. Четырехмерные вещественные линейные алгебры с единицей, получаемые процессом Кэли — Диксона

В этом разделе мы считаем, что полем P стало поле действительных чисел.

Каждая четырехмерная алгебра с единицей, полученная процессом Кэли — Диксона, возникает из двумерной алгебры с единицей. Всякая вещественная двумерная алгебра с единицей изоморфна одной из следующих алгебр $\mathrm{R}(\tau) = \left\{a + b\tau \,\middle|\, a, b \in \mathrm{R}, \tau^2 = \mu\right\}$, где $\mu = -1, 0, 1$ [3; 4]. Алгебра $\mathrm{R}(\tau)$ получается удвоением алгебры действительных чисел: $\mathrm{R}(\tau) = (\mathrm{R}, \theta, \mu)$. Эти алгебры коммутативны и ассоциативны, поэтому их удвоения будут ассоциативны. При $\tau^2 = 0$ алгебра $\mathrm{R}(\tau)$ называется алгеброй дуальных чисел и обозначается $\mathrm{R}(\varepsilon)$, при $\tau^2 = 1$ алгебра $\mathrm{R}(\tau)$ обозначается $\mathrm{R}(e)$ и называется алгеброй двойных чисел; при $\tau^2 = -1$ алгебра $\mathrm{R}(\tau)$ обозначается $\mathrm{R}(i)$ и является алгеброй комплексных чисел. Каждая из перечисленных алгебр $\mathrm{R}(\tau)$ обладает только двумя инволюциями: θ и $\overline{\theta}$.

В силу этого и свойства 7° при перечислении вещественных четырехмерных алгебр с единицей, получаемых методом Кэли — Диксона, возникает ряд случаев.

Случай 1. Алгебры $(\mathrm{R}(\tau), \theta, 0) = \mathrm{B}_{4,\mu}$, $\mu = \tau^2$. Элементы этой алгебры представляются в виде $a + \nu b$, где $a, b \in \mathrm{R}(\tau)$, а $\nu = (0,1)$ и $\nu^2 = 0$. Операция умножения определяется формулой $(a + \nu b)(c + \nu d) = ac + \nu(ad + bc)$.

Элементы $e_0 = 1, e_1 = \tau, e_2 = \nu, e_3 = \nu\tau$ составляют базис алгебры $\mathrm{B}_{4,\mu}$. В зависимости от значения μ возникают следующие подслучаи.

1.1. $\tau^2 = 0$. Тогда алгебра $\mathrm{B}_{4,0}$ задается следующими соотношениями:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0,\ \ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3,\, e_1e_3 = e_3e_1 = 0,\, e_2e_3 = e_3e_2 = 0\,.$$

Алгебра $\mathrm{B}_{4,0}$ изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,5}$, приведенной в таблице. Действительно, перейдем в алгебре $\mathrm{B}_{4,0}$ к новому базису $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ по формулам

$$\varepsilon_0 = e_0, \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \varepsilon_3 = e_3\,.$$

Тогда получим, что ε_0 — единица алгебры $\mathrm{B}_{4,0}$,

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_3,\, \varepsilon_2^2 = -\varepsilon_3,\, \varepsilon_3^2 = 0,\, \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_3\varepsilon_2 = 0\,.$$

1.2. $\tau^2 = 1$. В этом случае базисные элементы алгебры $\mathrm{B}_{4,1}$ удовлетворяют соотношениям

$$e_1^2 = e_0,\, e_2^2 = e_3^2 = 0,\, e_1e_2 = e_2e_1 = e_3,\, e_1e_3 = e_3e_1 = e_2,\, e_2e_3 = e_3e_2 = 0\,.$$

Элемент $e = \dfrac{1}{2}(e_0 + e_1)$ — нетривиальный идемпотент этой алгебры: $e^2 = \dfrac{1}{4}\left(e_0^2 + 2e_0e_1 + e_1^2\right) = \dfrac{1}{2}(e_0 + e_1) = e$. Следовательно, алгебра $\mathrm{B}_{4,1}$ — приводимая алгебра. Ее можно представить в виде прямой суммы двух отличных от нуля идеалов.

1.3. $\tau^2 = -1$. Базисные элементы алгебры $\mathrm{B}_{4,-1}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$e_1^2 = -e_0,\, e_2^2 = e_3^2 = 0,\, e_1e_2 = e_2e_1 = e_3,\, e_1e_3 = e_3e_1 = -e_2,\, e_2e_3 = e_3e_2 = 0\,.$$

Эти соотношения определяют операцию умножения алгебры $\mathrm{A}_{4,14}$.

Случай 2. Алгебры $(\mathrm{R}(\tau),\theta,1)$. Операция умножения в этих алгебрах коммутативна и определяется равенством

$$(a+\nu b)(c+\nu d)=(ac+bd)+\nu(ad+bc),\ \nu^2=1\,.$$

Базис этих алгебр составляют элементы $e_0=1, e_1=\tau$, $e_2=\nu, e_3=\nu\tau$ $\left(\tau^2=0,\pm 1\right)$, элемент e_0 — единица алгебры, а $e_2^2=\nu^2=1$. Поэтому элемент $e=\frac{1}{2}(e_0+e_2)$ является нетривиальным идемпотентом. Следовательно, все рассматриваемые алгебры — приводимые.

Случай 3. Алгебры $(\mathrm{R}(\tau),\theta,-1)=\mathrm{C}_{4,\mu}$. Эти алгебры коммутативны. Если $\mu=0$, то есть $\tau^2=0$, то алгебра $\mathrm{C}_{4,0}$ оказывается изоморфной алгебре $\mathrm{A}_{4,14}$. При $\mu=\tau^2=1$ получаем алгебру $\mathrm{C}_{4,1}$. Элемент $e=\frac{1}{2}(e_0+e_1)$ является нетривиальным идемпотентом алгебры $\mathrm{C}_{4,1}$. Соответственно, алгебра $\mathrm{C}_{4,1}$ — приводима. Если $\mu=-1$, то элемент $e=\frac{1}{2}(e_0+e_3)$ будет нетривиальным идемпотентом алгебры $\mathrm{C}_{4,-1}$. Значит, она будет приводимой.

Случай 4. Алгебры $\left(\mathrm{R}(\tau),\overline{\theta},0\right)=\mathrm{D}_{4,\mu},\ \mu=\tau^2$. Операция умножения в $\mathrm{D}_{4,\mu}$ определяется равенством

$$(a+\nu b)(c+\nu d)=ac+\nu(\overline{a}d+cb),\ \nu^2=0\,.$$

Если $\mu=0$, то алгебра $\mathrm{D}_{4,0}$ изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,11}$.

Если $\mu=1$, то получаем алгебру $\mathrm{D}_{4,1}$, которая оказывается изоморфной алгебре $\mathrm{A}_{4,10}$.

При $\mu=-1$ приходим к алгебре $\mathrm{D}_{4,-1}$, которая изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,9}$. Эта алгебра является алгеброй полукватернионов Э. Штуди.

Случай 5. Алгебры $\left(\mathrm{R}(\tau),\overline{\theta},1\right)=\mathrm{E}_{4,\mu}$. Операция умножения в них определяется условием

$$(a+vb)(c+vd)=\left(ac+d\overline{b}\right)+v\left(\overline{a}d+cb\right),$$

где $a,b,c,d\in\mathrm{R}(\tau)$, а $v^2=1$.

При $\mu=0$ приходим к алгебре $\mathrm{E}_{4,0}$, которая изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,10}$.

Если $\mu=1$, то алгебра $\mathrm{E}_{4,1}$ является изоморфной алгебре $\mathrm{A}_{4,8}$.

При $\mu=-1$ получаем алгебру $\mathrm{E}_{4,-1}$, которая также изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,8}$.

Случай 6. Алгебры $\left(\mathrm{R}(\tau),\overline{\theta},-1\right)=\mathrm{F}_{4,\mu}$. Эти алгебры ассоциативны, и операция умножения в них определяется условием $(a+vb)(c+vd)=\left(ac-d\overline{b}\right)+v\left(\overline{a}d+cb\right)$, $v^2=-1$.

Если $\mu=0$, то, выбрав в алгебре $\mathrm{F}_{4,0}$ подходящий базис, мы получим, что алгебра $\mathrm{F}_{4,0}$ изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,9}$.

При $\mu=1$ получим, что алгебра $\mathrm{F}_{4,1}$ изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,8}$.

Если $\mu=-1$, то получаем, что алгебра $\mathrm{F}_{4,-1}$ изоморфна алгебре $\mathrm{A}_{4,7}$ и является алгеброй вещественных кватернионов Гамильтона.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 1.

(1) В классификации Штуди — Картана четырехмерных вещественных ассоциативных алгебр с единицей только семь алгебр могут быть получены процессом удвоения Кэли — Диксона.

(2) Имеют место следующие изоморфизмы:

$$\mathrm{A}_{4,5} \cong \left(\mathrm{R}(\varepsilon),\theta,0\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,7} \cong \left(\mathrm{R}(i),\overline{\theta},-1\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,8} \cong \left(\mathrm{R}(e),\overline{\theta},1\right)\cong\left(\mathrm{R}(e),\overline{\theta},-1\right)\cong\left(\mathrm{R}(e),\theta,1\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,9} \cong \left(\mathrm{R}(i),\overline{\theta},0\right)\cong\left(\mathrm{R}(\varepsilon),\overline{\theta},-1\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,10} \cong \left(\mathrm{R}(e),\overline{\theta},0\right)\cong\left(\mathrm{R}(\varepsilon),\overline{\theta},1\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,11} \cong \left(\mathrm{R}(\varepsilon),\overline{\theta},0\right);$$

$$\mathrm{A}_{4,14} \cong \left(\mathrm{R}(i),\theta,0\right)\cong\left(\mathrm{R}(\varepsilon),\theta,-1\right).$$

Теорема 2. *Алгебры* $\left(\mathrm{R}(e),\theta,0\right)$, $\left(\mathrm{R}(\tau),\theta,1\right)$ $\left(\tau^2=0,\pm1\right)$, $\left(\mathrm{R}(e),\theta,-1\right)$, $\left(\mathrm{R}(i),\theta,-1\right)$*, полученные процессом удвоения Кэли — Диксона, являются приводимыми.*

Замечание. Алгебра $\mathrm{A}_{4,5}$ изоморфна тензорному произведению $\mathrm{R}(\varepsilon)\otimes\mathrm{R}(\varepsilon)$ двух экземпляров алгебры дуальных чисел и является алгеброй А. Вейля высоты 2 и ширины 2. В приведенной классификации есть еще четыре алгебры А. Вейля: алгебры $\mathrm{A}_{4,1}$, $\mathrm{A}_{4,4}$, $\mathrm{A}_{4,6}$, $\mathrm{A}_{4,13}$. Алгебры Вейля лежат в основе построения и изучения расслоений А. Вейля [5—10].

Список литературы

1. *Stude E., Cartan E.* Nombres complexes // Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliqués. 1908. T. 1, vol. 1. P. 329—468.

2. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1985.

3. *Жевлаков К. А. Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативности. М., 1978.

4. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.

5. *Weil A.* Theories des points sur les varietetes differentiables // Coloq. Internat. Centre nat. rech. sci. Vol. 52. Strasbourg, 1953. P. 111—117.

6. *Morimoto A.* Prolongation of connections to tangent bundles of near points // J. Different. Geom. 1976. Vol. 11 (4). P. 479—498.

7. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и многообразия Вейля // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Т. 73 : Современная математика и ее применения. Тематические обзоры. М., 2002. С. 162—236.

8. *Kolar I.* Affine structures on Weil bundles // Nagoya Math. J. 2000. Vol. 158. P. 99—106.

9. *Султанов А.Я., Мошин А.К.* О сумме Уитни расслоений Вейля // Труды институты системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. М., 2007. Т. 31(1). С. 215—223.

10. *Султанов А.Я.* Гомоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля // Математические заметки. М., 2012. № 91(6). С. 896—899.

A. Sultanov, I. Garkina

Irreducible four dimensional algebras with identity obtained by the Cayley — Dickson doubling

We obtain all the irreducible four dimensional associative algebras with identity over the field of real numbers, which can be obtained by the Cayley — Dickson doubling of real two dimensional algebras with identity.

УДК 514.76

Г.А. Султанова
Пензенский государственный университет
sultgaliya@yandex.ru

О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности

Исследуются группы движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда база расслоения является максимально подвижным пространством аффинной связности.